



Instrucciones:

- Asegúrate que tienes el examen del nivel correcto y lee todos los enunciados con calma.
- Coloca en una o dos hojas blancas tu nombre, grado, escuela y municipio. En esa misma hoja coloca tu respuesta y procedimiento si es necesario indicando claramente a cuál problema corresponde.
- Tienes dos horas para resolver este examen.
- Puedes utilizar lápiz o pluma, borrador y, si tú prefieres, juego de geometría. No está permitido el uso de calculadoras, apuntes, tablas, cualquier dispositivo electrónico ni consultar a otras personas.
- Los resultados se publicarán el 15 de marzo en la página <https://olimpiadasbasicas.cimat.mx/>.

Sección 1

Escribe tu procedimiento. Cada problema da hasta 5 puntos.

1. Demostrar que el promedio de dos números está exactamente a la mitad de ellos.
2. Si $x + \sqrt{x} = 5$. Calcula $x + \frac{5}{\sqrt{x}}$.
3. Determina el menor entero que es mayor o igual que

$$\sqrt{\sqrt{7\sqrt{7\sqrt{7\sqrt{7}}}}}$$

4. Sean a, b, n números naturales. Demuestra la siguiente identidad:

$$a^n + b^n = (a + b)(a^{n-1} + b^{n-1}) - ab(a^{n-2} + b^{n-2})$$

Sección 2

Escribe tu procedimiento. Cada pregunta da 2 puntos.

5. Sean z, n y m números enteros. Supongamos que $z^n = z^m$. ¿Será cierto que $m = n$?
6. Recordemos que si p, q son enteros. Concatenarle a p el número q era poner los dígitos de q después de los de p . Este proceso lo denotábamos como \overline{pq} . Por ejemplo si $p = 23$ y $q = 17$ entonces $\overline{pq} = 2317$. Supongamos que el número a es impar y b es un número natural. ¿Será cierto que si b divide a \overline{ab} entonces b divide a a ? ¿Será cierto que si b divide a \overline{ba} entonces b divide a a ?
7. ¿Qué hay más: números de tres dígitos cuya suma alternada de dígitos sea cero o números de tres dígitos que sean múltiplos de 22?

Lee el siguiente enunciado y responde las preguntas.

Enunciado En un tablero de $n \times n$ cuadrados se colocan los números del 1 al n^2 en orden natural: Los números del 1 al n en el primer renglón. Los números del $n + 1$ al $2n$ en el segundo renglón etc. En cada renglón se ponen los números de izquierda a derecha y uno en cada cuadradito. La diagonal principal es la que va de la esquina superior izquierda a la inferior derecha y la diagonal secundaria es la que va de la esquina superior derecha a la inferior izquierda.

8. ¿Cuáles son los números que ocupan el primer y último lugar de la diagonal secundaria? ¿Cuáles son los números que ocupan el segundo y penúltimo lugar de la diagonal principal?
9. Para esta pregunta supongamos que $n = 100$. ¿Cuáles son los números de la diagonal principal? Da los primeros cuatro y los últimos cuatro solamente. ¿Cuál es la suma de los números en la diagonal principal?
10. Da una fórmula para la suma de los números de la diagonal principal del tablero de $n \times n$. Da una fórmula para la suma de los números de la diagonal secundaria del tablero de $n \times n$.